CENTRALE LYON

Modélisation du comportement automobiliste face à un virage

P.É. 78 : «Modélisation du comportement automobiliste, approche microscopique».

Élèves :
Maxime BEHOCARAY
Roch DUCLOS
Asma HIBATALLAH
Louqmen SAILLARD
Mahdi JALLOULI
Ange DENAYROU

Enseignants :
Philippe MICHEL
Alexandre SAIDI
Abdel-Malek ZINE

Année 2024-2025

Table des matières

CENTRALE LYON

1 Introduction et motivations

Nous cherchons ici à modéliser le comportement d'un automobiliste face à des changements de trajectoire sur la route. En d'autres termes, comment celui-ci appréhende les virages de la route et tourne le volant pour s'y adapter.

Dans cette partie, nous supposons que le conducteur est seul sur la route, et nous cherchons juste à déterminer sa réaction face aux bordures de la route. Les paramètres propres pouvant impacter le comportement de l'automobiliste sont T_A le temps d'anticipation du conducteur et τ_H le temps de retard du conducteur, qui seront développés dans la partie 3. Ce modèle est grandement inspiré de l'article [1], dont nous sommes très reconnaissants.

2 Concepts principaux, notations et paramètres

2.1 Concepts principaux

Pour mener à bien notre modélisation, il faut prendre en compte plusieurs grandeurs. La première est appelée la courbure de la route C.

Définition. Courbure d'une route

C'est, d'après [2], la dérivée de l'angle de la route α (déterminé à partir d'une origine de 0 rad quelconque) par rapport à la distance ℓ parcourue sur la route.

Pour tout ℓ positif tel que l'expression suivante soit définie,

$$C(l) = \frac{d\alpha}{d\ell}(\ell)$$

Remarques.

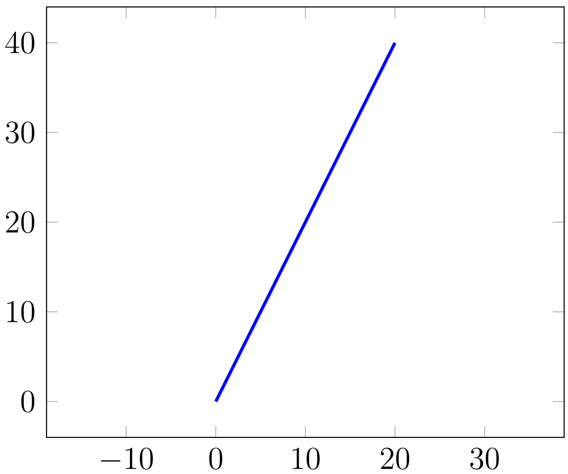
La courbure sert à déterminer à quel point un virage est "serré". Plus cette quantité est grande en valeur absolue, plus le virage est serré. Ainsi, une courbure nulle correspond à une ligne droite.

Le signe de la courbure, lui, permet de déterminer le sens dans lequel la voiture va tourner. Munissons le plan de son sens trigonométrique. Si la courbure est positive (resp. négative), alors la voiture tourne à gauche (resp. à droite).

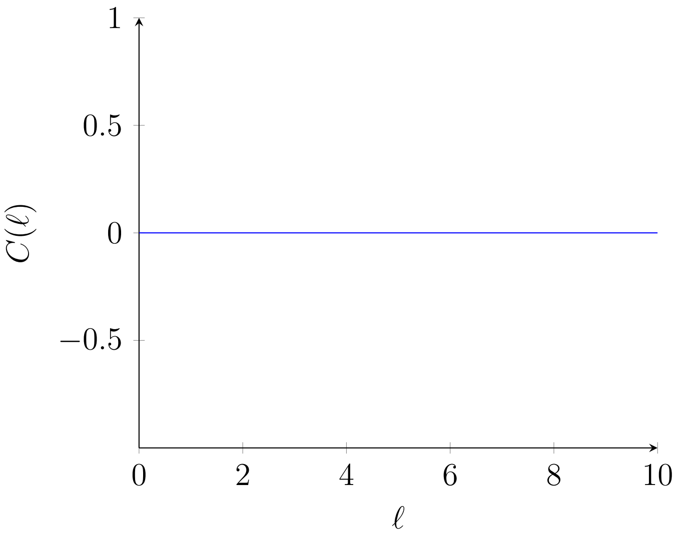
Si l'on travaille avec des unités physiques, la courbure s'exprime en m^{-1}.

Ci-dessous, des exemples de routes et de l'évolution de C en fonction de la longueur pour ces routes.

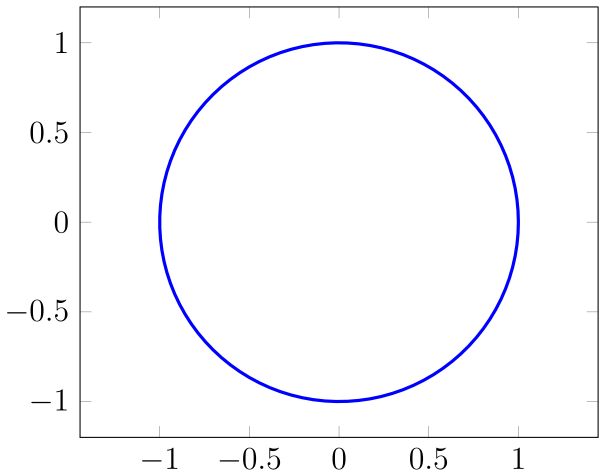
- Pour une ligne droite



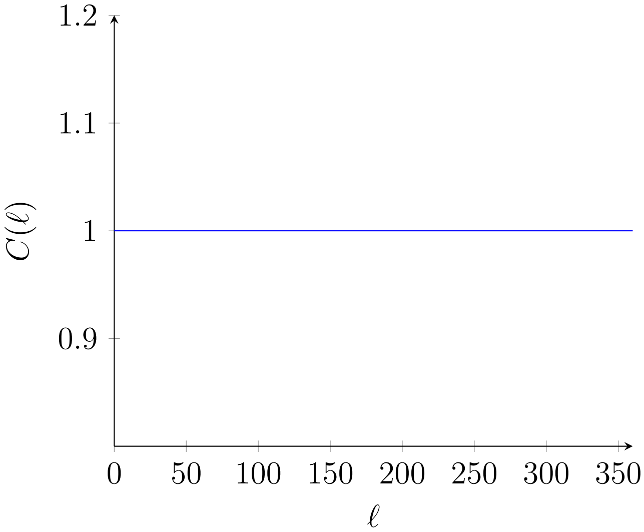
Courbure nulle



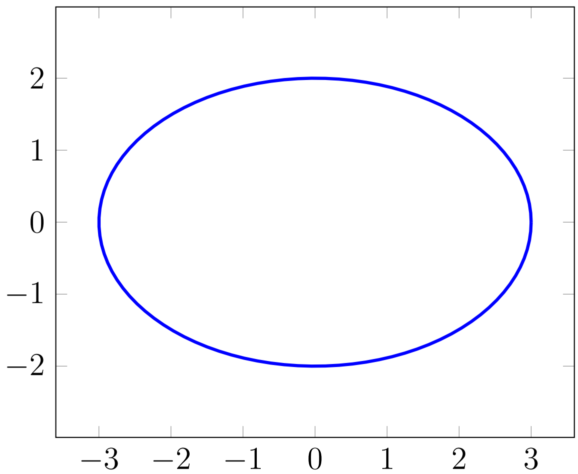
- Pour un cercle



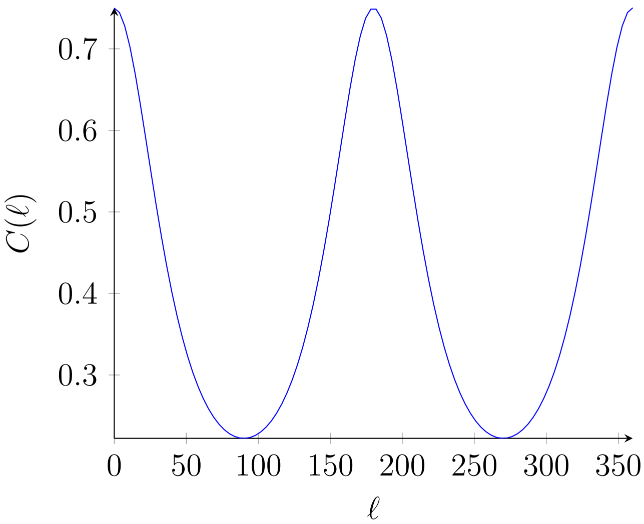
Courbure constante



- Pour une ellipse



Courbure variable



A partir d'une courbe paramétrée donnée, il peut être intéressant de déterminer l'expression de C en fonction de ℓ.

Proposition. Expression de la courbure d'une route du plan

Une route peut être modélisée par une courbe paramétrée du plan qui prend pour paramètre la longueur ℓ de la route.

Soit $\Phi = (x, y)$ une telle route de classe $\mathcal{C}^2$. Notons C_Φ sa courbure.
Alors, d'après [3], pour tout ℓ positif tel que l'expression suivante soit définie,

$$C_\Phi(\ell) = \frac{x'(\ell)y''(\ell) - y'(\ell)x''(\ell)}{(x'^2(\ell) + y'^2(\ell))^{\frac{3}{2}}}$$

Corollaire. Cas d'une fonction réelle

Une fonction réelle f est décrite par la paramétrisation suivante :

$$\Phi_f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \ell & \longmapsto & (\ell, f(\ell)) \end{array}$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors la courbure est :

$$C_\Phi(\ell) = \frac{f''(\ell)}{(1 + f'^2(\ell))^{\frac{3}{2}}}$$

Démonstration.

Évident en posant, pour ℓ positif, $x(\ell) = \ell$ et $y(\ell) = f(\ell)$.

Exemples.

On va reprendre les exemples tracés précédemment.

Pour un cercle de rayon 1, une paramétrisation possible est :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \ell & \longmapsto & (\cos(\ell), \sin(\ell)) \end{array}$$

Calculons les dérivées successives. Pour ℓ dans $\mathbb{R}_+$,

$$\Phi'(\ell) = (-\sin(\ell), \cos(\ell))$$

$$\Phi''(\ell) = (-\cos(\ell), -\sin(\ell))$$

La courbure est alors :

$$C_\Phi(\ell) = \frac{(-\sin(\ell))(-\sin(\ell)) - \cos(\ell)(-\cos(\ell))}{((-\sin(\ell))^2 + \cos^2(\ell))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin^2(\ell) + \cos^2(\ell)}{(\sin^2(\ell) + \cos^2(\ell))^{\frac{3}{2}}} = 1$$

Pour une ellipse de demi-grand axe 3 et de demi-petit axe 2, une paramétrisation possible est :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \ell & \longmapsto & (3\cos(\ell), 2\sin(\ell)) \end{array}$$

Calculons les dérivées successives. Pour ℓ dans $\mathbb{R}_+$,

$$\Phi'(\ell) = (-3\sin(\ell), 2\cos(\ell))$$

$$\Phi''(\ell) = (-3\cos(\ell), -2\sin(\ell))$$

La courbure est alors :

$$C_\Phi(\ell) = \frac{-3\sin(\ell)(-2\sin(\ell)) - 2\cos(\ell)(-3\cos(\ell))}{((-3\sin(\ell))^2 + (2\cos(\ell))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6}{\left(9\sin^2(\ell) + 4\cos^2(\ell)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Il faut désormais prendre en compte la vitesse de la voiture. En effet, elle n'est pas constante, ce qui fait que nous devons introduire ℓ, fonction du temps t décrivant la distance parcourue par la voiture sur la route au cours du temps.

Cela amène à la définition temporelle de la courbure :

Définition. Courbure d'une route (expression temporelle)

C'est tout simplement la composée de ℓ par C. On note cette courbure temporelle K_s.

Les éléments propres à la route étant définis, définissons maintenant ceux qui sont liés au véhicule.

Définition. Courbure d'un véhicule

C'est la même notion que la courbure d'une route, mais cette fois-ci appliquée à un véhicule qui lui aussi décrit une certaine trajectoire dans le plan. On la définit directement temporellement pour abréger ce document, et on la note K_l.

Proposition. Relation entre la courbure d'un véhicule et l'angle du volant

D'après [1], la courbure d'un véhicule est liée à l'angle que fait le volant de ce même véhicule par rapport à sa position initiale :

Pour tout t positif tel que l'expression suivante soit définie,

$$K_l(t) = E_L \cdot A_f^*(t - \tau_F)$$

Avec :

- E_L la sensibilité de la direction en régime permanent ($E_L = 0,049 \text{ m}^{-1}$ d'après [1]).
- τ_F le temps de délai du véhicule ($\tau_F = 0,2$ s d'après [1]).
- A_f^* l'angle formé par le volant au cours du temps par rapport à sa position initiale.

Nous disposons des courbures de la route et du véhicule. L'intérêt maintenant est de quantifier à quel point le véhicule dévie de la route. Cela peut se faire au moyen de deux grandeurs :

- La déviation angulaire Ψ_Δ, fonction du temps
- La déviation latérale y_Δ, fonction du temps

Ci-dessous, l'expression de ces deux grandeurs d'après [1] :

Proposition. Expression de la déviation angulaire

Soit t_0 un réel positif tel qu'on connaît l'évaluation de Ψ_δ en t_0.

Pour tout t positif tel que l'expression suivante soit définie,

$$\Psi_\Delta(t) = \Psi_\Delta(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\theta)(K_l(\theta) - K_s(\theta)d\theta$$

où v est la vitesse du véhicule, fonction du temps.

Proposition. Expression de la déviation latérale

Soit t_0 un réel positif tel qu'on connaît l'évaluation de y_Δ en t_0.

Pour tout t positif tel que l'expression suivante soit définie,

$$y_\Delta(t) = y_\Delta(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\theta)\Psi_\Delta(\theta)d\theta$$

où v est la vitesse du véhicule, fonction du temps.

3 Introduction au Modèle Global de Contrôle de la Direction

Le comportement de conduite peut être modélisé comme un processus de contrôle en boucle fermée, dans lequel le conducteur ajuste l'angle du volant pour suivre une trajectoire souhaitée. Pour capturer avec précision la dynamique de la prise de décision du conducteur, nous allons utilisé un modèle à 2 niveaux :

- **Le modèle anticipatoire (ou contrôle en boucle ouverte)** : Il représente la capacité du conducteur à prévoir les changements de trajectoire en fonction de la courbure désirée du chemin. Ce modèle repose sur une réponse anticipée qui prend en compte une durée d'anticipation T_A et une dynamique transitoire avec un retard.
- **Le modèle compensatoire (ou contrôle en boucle fermée)** : Il intervient pour corriger les écarts entre la trajectoire réelle et la trajectoire souhaitée. Ce contrôle est basé sur des signaux d'erreur tels que l'erreur de courbure K_A, l'erreur d'angle de cap Ψ_A et la déviation latérale y_A. Ces erreurs sont intégrées avec un délai T_h et ajustées par des gains spécifiques afin de stabiliser la trajectoire du véhicule.

L'interaction entre ces deux sous-modèles permet de décrire plus précisément la manière dont un conducteur humain ajuste son volant pour négocier des virages et maintenir une trajectoire stable. Le modèle global combine ainsi une phase prédictive, qui permet d'anticiper les courbures du trajet, et une phase corrective, qui ajuste la direction en réponse aux perturbations et aux erreurs de suivi de trajectoire.

3.1 Modèle anticipatoire

Il traduit la manière dont un conducteur anticipe les virages et ajuste proactivement son angle de braquage en fonction de la courbure du trajet. Plutôt que de réagir uniquement aux erreurs de trajectoire (comme dans un modèle purement compensatoire), ce sous-modèle vise à prévoir l'évolution de la route et à ajuster le volant en avance.

Le sous-modèle anticipatoire est basé sur l'idée que le conducteur ajuste son angle de volant A_f^* en fonction de la courbure de la route K_s, mais avec un décalage temporel correspondant au temps d'anticipation T_A.

L'équation générale du sous-modèle anticipatoire est donnée par :

$$A_f^*(t) + a_1 A_f^*(t-1) + \cdots + a_n A_f^*(t-n) = b_1 K_s(t+T_A) + \cdots + b_m K_s(t-m+T_A) \quad (1)$$

où :

- $A_f^*(t)$ est l'angle de braquage anticipé,
- $K_s(t+T_A)$ est la courbure du chemin désiré à un instant futur,
- T_A est le temps d'anticipation,
- $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_m$ sont des coefficients du modèle.

Le conducteur ne réagit donc pas instantanément mais prévoit l'effet d'un virage à l'avance et ajuste son volant en conséquence.

Simplification et identification Il est possible de modéliser $A_f^*(t)$ en utilisant des hypothèses simplifiées sur le comportement du conducteur. Une approche courante consiste à supposer que :

$$A_f^*(t) \approx G\, K_s(t+T_A),$$

où G est un gain empirique lié au comportement du conducteur. Ce gain peut être ajusté à partir de modèles existants (par exemple, Donges, McRuer) ou à partir de données de simulation.

Ajustement des coefficients a_i et b_i par méthodes numériques

Si l'on connaît les valeurs de $K_s(t)$ (la courbure désirée du chemin), il est envisageable de résoudre l'équation du sous-modèle anticipatoire par optimisation numérique. Celle-ci s'exprime comme suit :

$$A_f^*(t) + a_1 A_f^*(t-1) + \cdots + a_n A_f^*(t-n) = b_1 K_s(t+T_A) + \cdots + b_m K_s(t-m+T_A).$$

On peut procéder de la manière suivante :

1. Choisir une structure simplifiée :

$$A_f^*(t) = b_1 K_s(t+T_A) + \cdots + b_m K_s(t-m+T_A).$$

2. Optimiser les coefficients b_i en minimisant l'erreur entre la prédiction du modèle et une estimation théorique ou simulée du comportement du conducteur.

On peut en particulier utiliser la régression par moindres carrés, où l'objectif est de trouver les coefficients b_i qui minimisent l'erreur quadratique suivante :

$$\sum_t \left(A_f^*(t) - \sum_i b_i\, K_s(t-i+T_A) \right)^2.$$

Cette minimisation peut être effectuée numériquement à l'aide d'un algorithme de descente de gradient ou par la méthode des moindres carrés.

3.2 Modèle compensatoire

Le modèle compensatoire joue un rôle essentiel dans le contrôle de la trajectoire du véhicule en corrigeant les écarts entre la trajectoire réelle et la trajectoire désirée. Tandis que le modèle anticipatoire anticipe les changements de courbure et prépare la réponse du conducteur avant l'entrée en virage, le modèle compensatoire intervient pour corriger en temps réel les erreurs qui se manifestent lors de la conduite.

Plus précisément, le modèle compensatoire permet de :

- Corriger l'erreur de courbure $K_A(t)$, c'est-à-dire la différence entre la courbure du chemin suivi et la courbure idéale.
- Réduire l'erreur d'angle de cap $\Psi_A(t)$, qui correspond à l'écart entre l'orientation réelle du véhicule et l'orientation idéale.
- Limiter la déviation latérale $y_A(t)$, qui représente la distance perpendiculaire entre la position réelle du véhicule et la trajectoire souhaitée.

En appliquant un délai humain T_{delay} pour tenir compte du temps de réaction du conducteur, le modèle génère une commande corrective en ajustant l'angle de braquage du volant. Ce mécanisme de correction en boucle fermée permet ainsi de compenser les perturbations et les imprécisions inhérentes au système de conduite, assurant une trajectoire plus stable et sécurisée.

Comme dit précedemment, le modèle compensatoire prend en compte trois erreurs principales en entrée :

1. Erreur de courbure du chemin $K_A(t)$
2. Erreur d'angle de cap $\Psi_A(t)$
3. Déviation latérale $y_A(t)$

$$A_c(t) = a_1\, K_A(t - T_{\text{delay}}) + a_2\, \Psi_A(t - T_{\text{delay}}) + a_3\, y_A(t - T_{\text{delay}})$$

où :

- $A_c(t)$ est l'angle de volant corrigé par le modèle compensatoire à l'instant t.
- T_{delay} est le délai humain, représentant le temps de réaction du conducteur.
- a_1, a_2, a_3 sont les paramètres du modèle compensatoire (les coefficients que l'on cherche à estimer).

Identification des coefficients a_i dans le modèle compensatoire Les coefficients sont ajustés manuellement lors des simulations.

4 Bibliographie

[1] Edmund Donges. « A Two-Level Model of Driver Steering Behavior ». In : *HUMAN FACTORS* (1978).

[2] Jean-Marie Monier. « Géométrie ». In : *J'intègre, Dunod* (1978).

[3] Jean-Marie Arnaudiès et Jacqueline Lelong-Ferrand. « Cours de mathématiques 3. géométrie et cinématique ». In : *Les cours de référence, Dunod* (1977).